

Penne **S**conosciute

Video **V**conosciuti

XXVI EDIZIONE



PIANCASTAGNAIO (Si) , 19 OTTOBRE 2024

MUSICA E MATEMATICA...SORELLE GEMELLE

Roberto IMPERIALE

GRIMeD

QUAND'ERO BAMBINO...

ed era il giorno di Pasqua che si festeggiava la Patrona del mio lontano paese dell'anima, accadeva il sortilegio sperato: mio nonno e mio padre mi portavano in piazza, ai piedi della cassarmonica, dove legendarie bande musicali del Sud del Sud dei Santi suonavano l'opera, che essi conoscevano a memoria, ed era l'unico, straordinario irripetibile incontro con la musica, che mio nonno contadino e mio padre ex intagliatore d'ebano e poi impiegato dello Stato ma rimasto per sempre «operaio di sogni» (come il poeta dice del poeta) potevano sperare di avere, da poveri in un paese defraudato, ma ricchissimo di storia e di grandissima umanità; e, quando s'arrivava all'«Addio alla mamma» della Cavalleria Rusticana di Pietro Mascagni (1863 – 1945) mio padre – al di là della vicenda - si commuoveva fino alle lacrime, ch  aveva perso sua madre da giovane, e non poteva non piangere, cantando in cuor suo e a mezza voce «**Un bacio, mamma..., un altro bacio...Addio!**»; ed era la stessa commozione che provava quando, recitandomi a memoria «Davanti San Guido» di Giosu  Carducci (1835 – 1907), giungeva a quei versi: «**Di cima al poggio allor, dal cimitero, gi  de' cipressi per la verde via, alta, solenne, vestita di nero parvemi riveder nonna Lucia...**» che gliela ricordava...e io – **lo dir  con parole non mie** - ogni volta provavo ci  che provo ancora adesso e spero fino alla fine della mia vita, «**una commozione violenta: [...]. Le lacrime che scorrevano mi facevano bene**». (Agostino, 2012). E da allora, quantunque non sia un musicista, amo la musica, che per me   – come la sua sorella gemella, la matematica - il luogo del sapere e della fusione definitiva tra **EMOZIONE E CONOSCENZA**

Cavalleria Rusticana, INTERMEZZO



La mia sarà una piccolissima narrazione saltellante, il primo rigo del primo paragrafo della prima pagina del primo capitolo dell'infinito «libro che contiene tutti i libri», forse nascosto nella Biblioteca di Babele (J.L. Borges, 1899-1986) e luogo del lucidissimo smarrimento della ragione e del cuore che tentano di penetrare nell'armonia e nella bellezza del mondo.

IL PUNTO DI PARTENZA...

*“è il problema dell'unità della cultura. In ogni insegnamento ci dovrà essere un approccio **storico-genetico** [...] e il metodo **sperimentale** che attraversa tutte le «discipline» e le collega l'una all'altra.*

L'uomo vive con le radici nel passato e la fantasia nel futuro”.

(Lucio Lombardo Radice, 1976)

*Ma questo non è il voler sapere «**de omni re scibili et quibusdam aliis**» («di tutte le cose conoscibili e di alcune altre» - Pico della Mirandola, 1463 – 1494), su cui abbiamo ironizzato in tanti, ma «l'umana consapevolezza del limite e del desiderio di andare oltre».*

PICCOLA SILLOGE DI IDEE INFINITE - HANNO DETTO...

«Musica est exercitium arithmeticae occultum nescientis se numerare animi»

«La musica è un esercizio aritmetico occulto dell'animo inconsapevole di contare»

GOTTFRIED W. LEIBNIZ (1646-1716), Lettera a Charles Goldbach

«Ogni godimento è musicale, quindi matematico»

NOVALIS (1772 – 1801)

Se solo si potesse far capire alla gente che con la lingua è come con le formule matematiche — esse costituiscono un mondo a sé — giocano solo con se stesse, non esprimono altro che la loro natura meravigliosa, e proprio per questo sono così espressive, proprio per questo si rispecchia in esse lo strano gioco della relazione tra le cose.

(Novalis, 2024)

L'INTERPRETAZIONE o DELLA (*STRANA?*) RELAZIONE TRA LE COSE
 Osserviamo questi due «testi»

SYMPHONY N°5

Allegro con brio L. van Beethoven, Op. 67

$$x^2 + 10x = 39$$

AL-KHWĀRIZMĪ (~780 d.C. - ~850 d.C.)

1. Testi sintatticamente validi (corretti) detti: SPARTITO e EQUAZIONE
2. Testi *interpretabili* contenenti «parole» da interpretare (dar loro senso o «valore»)
3. ...E LE INDICAZIONI PER FARLO

$$x^2 + 10x = 39$$

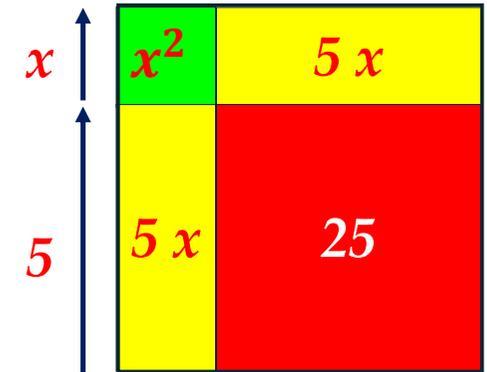
AL-KHWĀRIZMĪ (~780 d.C. - ~850 d.C.)

$$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$$

$$A = (x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25 = 64$$

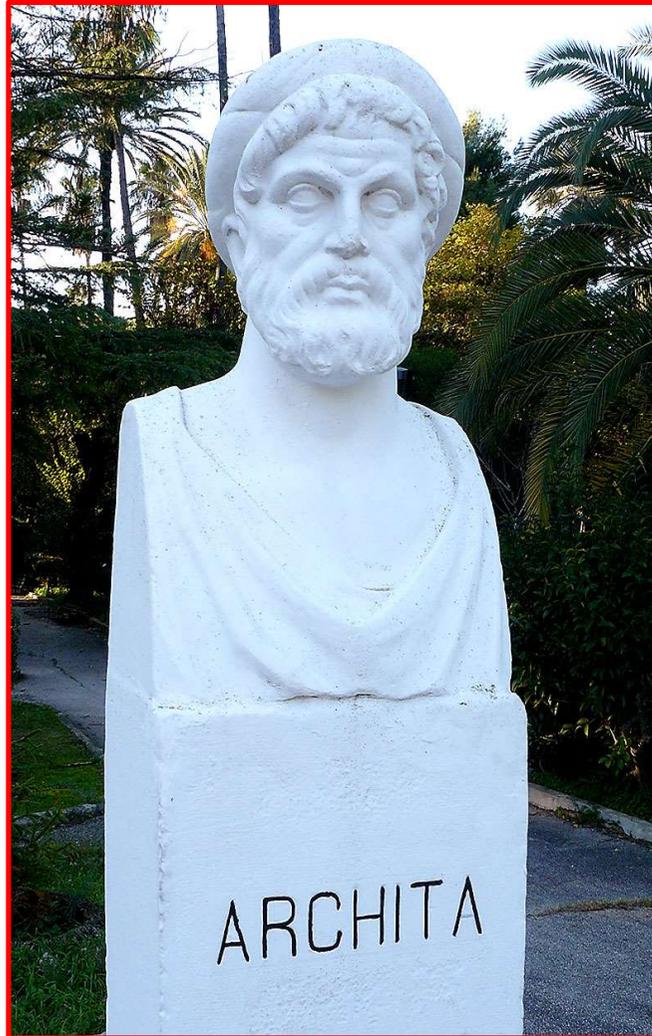
$$(x + 5)^2 = 64 \longrightarrow \sqrt{(x + 5)^2} = \sqrt{64}$$

$$x + 5 = 8 \longrightarrow x = 3$$



Il più celebre attacco della musica

QUADRATO DEL BINOMIO, «un'uguaglianza algebrica di importanza centrale per lo sviluppo dell'analisi moderna» (Zellini, 1999)

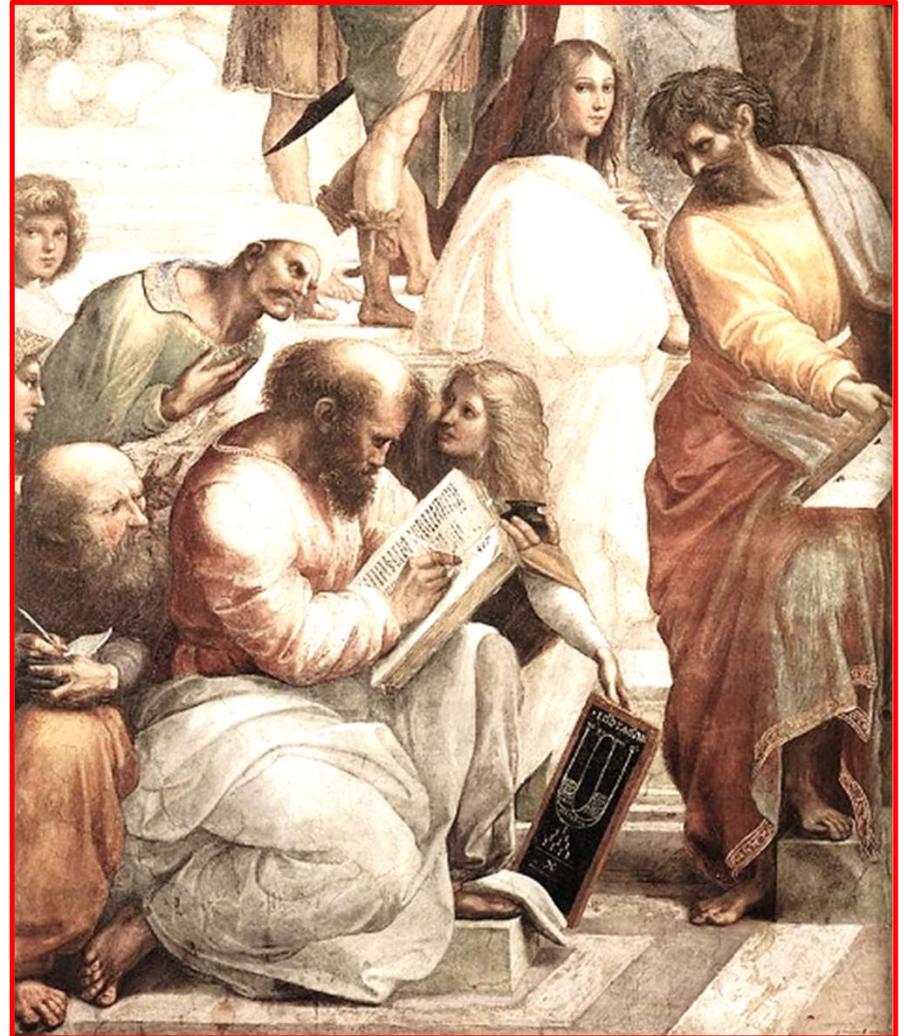


ARCHITA di TARANTO

*Ecco
un paio di*

*P
I
T
A
G
O
R
I
C
I*

o ex tali



ARISTOSSENO di TARANTO

ARCHITA di TARANTO (TARANTO, 428 a.C. – MATINUM, 360 a.C.)

Fu filosofo, matematico, musicologo, ingegnere e politico, ossia stratego (στρατηγός) della città che governò con democratica saggezza, favorendo lo sviluppo dell'agricoltura e una più equa distribuzione delle ricchezze, fondata sui principi **dell'armonia matematica**. Appartenente alla seconda generazione di pitagorici, fu allievo di FILOLAO (Crotone, 470 a.C.- Tebe, ~390 a.C.) e di EURITO (Crotone o Taranto, V secolo a.C.). Ad Archita si deve il merito di aver dato delle quattro scienze «matematiche», di derivazione pitagorica – poi **QUADRIVIUM** - queste straordinarie definizioni:

ARISMETRICA (in greco: **μάθημα**), SCIENZA DEI NUMERI FERMI -**GEOMETRIA**, SCIENZA DEI CORPI FERMI - **ASTRONOMIA**, SCIENZA DEI CORPI IN MOVIMENTO - **MUSICA**, SCIENZA DEI NUMERI IN MOVIMENTO.

Un importantissimo risultato **matematico (e musicale)** di Archita è la dimostrazione che non è possibile dividere in parti uguali un intervallo formato da numeri interi; in altre parole, che nessun rapporto **superparticolare** (2:1 ; 3:2 ; 4:3; 9:8) ammette un medio proporzionale razionale.

Ad esempio, la proporzione : **9 : x = x : 8** genera **$x^2 = 72$** , da cui **$x = \sqrt{72} \cong 8,485...$**

ARISTOSSENSO di TARANTO (TARANTO, ~375 a.C. - ~322 a.C.)

Nato come pitagorico, fu poi scolaro di Aristotele; sviluppò nella scuola peripatetica le indagini sulla natura e sulla matematica. Fu il massimo teorico greco di ritmica e di musica, e ne scrisse in numerosissime opere. I suoi **Elementi di Armonia** (Ἀρμονικά) sono fondamentali per la ricerca e per l'elaborazione teorica. Scrisse inoltre di psicologia, di morale, di politica, di aritmetica, di pedagogia e di storia.

Ad Aristosseno si deve l'invenzione del **Temperamento Equabile**, e di altro di cui si dirà.

MA SONO TANTI COLORO CHE HANNO AMATO,
AMANO, ED AMERANNO PER SEMPRE IL SAPERE...

CHI SONO?

PLATONE E ARISTOTELE

SOCRATE

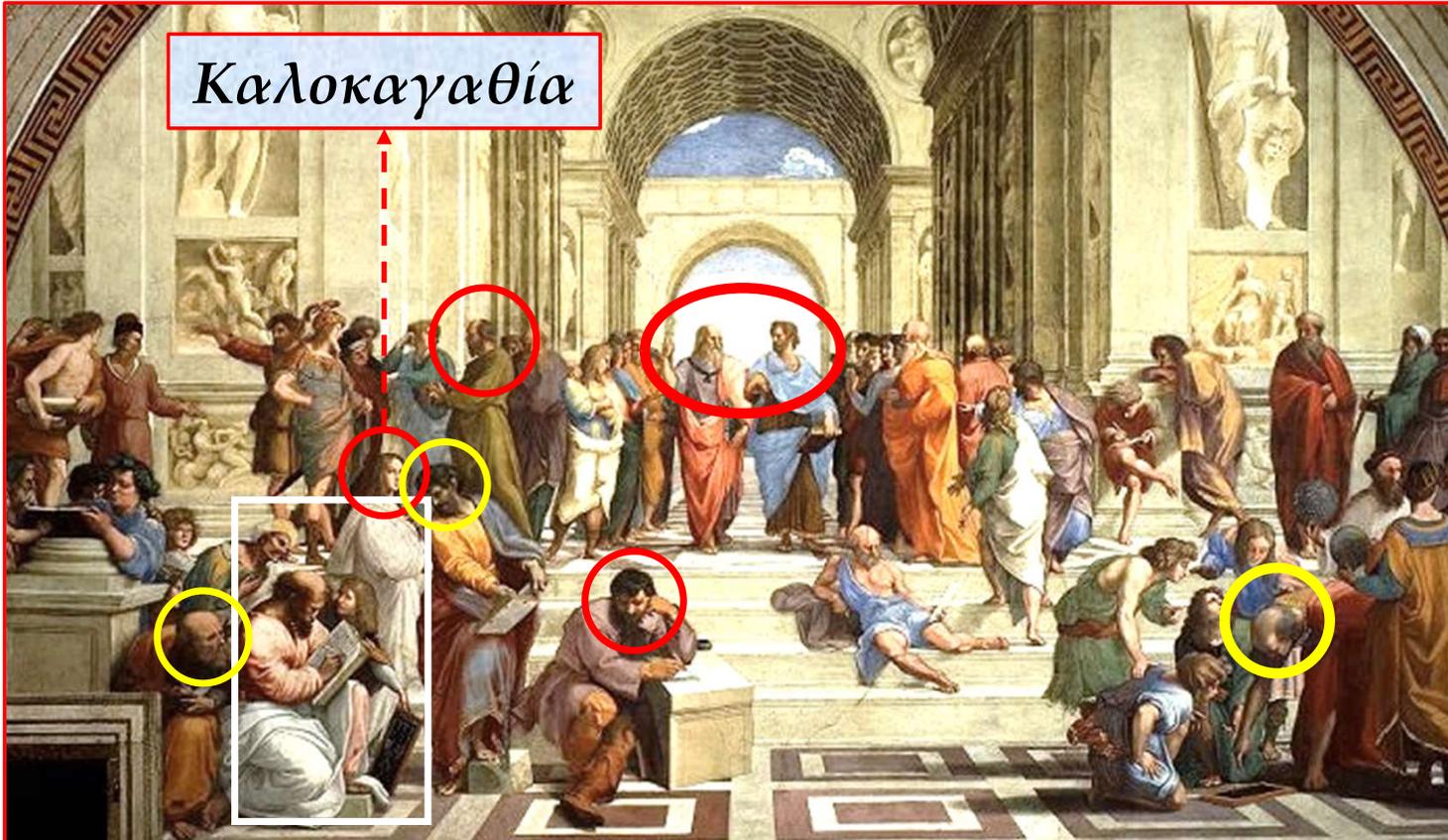
EUCLIDE O
ARCHIMEDE

ARISTOSSENO O
PARMENIDE O
SENOCRATE

ANASSIMANDRO O
SEVERINO BOEZIO O
EMPEDOCLE

ERACLITO

Καλοκαγαθία



Raffaello SANZIO (1483 – 1520)

LA SCUOLA DI ATENE

Stanze della Signatura – Musei Vaticani - ROMA

PITAGORA, ~570 a.C. ~ 495 a.C.

Nato (forse) a Samo, e morto (forse) a Metaponto, forse mai esistito (o esistita), forse nessuno o forse una moltitudine; forse l'umanità intera.



Quando è vissuto *Pitagora*? "In un secolo [...] miracoloso, di *Talete* (~640a.C.– ~548a.C.), di *Anassimandro* (~610 a.C. – ~546 a.C.) e dei filosofi ionici. [...]. Se si dà credito ad *Aristosseno* che vantava la conoscenza, se non familiarità con il concittadino *Archita*, Pitagora lasciò Samo all'età di quarant'anni, dopo che nell'isola si era instaurata la tirannide di Policrate, [...] «troppo oppressiva» per un uomo libero". **PITAGORA**, chi era costui? «Un *filosofo*, una figura poliedrica che fin dall'Antichità appartiene più al mito che alla storia. [...] Chi era in realtà il sapiente cui da sempre viene attribuito «*il teorema*» [...] ? «Sciamano e *matematico*, mago e riformatore politico, fisico e *musico*, fondatore di una setta, taumaturgo e capopopolo» (Bottazzini, 2020)

Il viaggio – reale o virtuale o «poietico» (cioè creato fantasticamente) che sia, prevede la figura di un viaggiatore. Pitagora (che «puose nome **FILOSOFIA** alla bellissima e onestissima figlia de lo imperatore de lo universo, Dante - Convivio, II°, XV, 12) fu, come lo stesso Dante, un "viaggiatore"; grazie ad essi imparò molte cose in campi tra loro diversi: ad esempio, dagli Egizi aveva appreso **la relazione che esiste tra i cateti e l'ipotenusa di un triangolo rettangolo.**

Correva perfino voce che avesse **UDITO LA «MUSICA» DELLE STELLE».**

In effetti, «Pitagora di Samo proponeva per primo una visione dell'universo in cui **la matematica era la chiave della realtà [...] e il cosmo (Kosmos) come un immenso strumento musicale risonante di divine armonie numeriche. [...] Per Pitagora e i suoi seguaci la matematica era la chiave non solo del mondo fisico ma soprattutto di quello spirituale, [...]. La contemplazione dei numeri e delle loro relazioni rappresentava l'unione col «divino»**

(Wertheim, 1996)

DELL'ARMONIA E DELLA MUSICA CELESTE

“Che musica è questa così intensa e così piacevole, che riempie le mie orecchie?” [...] “È quella prodotta dall’energia che muove le sfere stesse” (Cicerone (106 a.C. – 43 a.C.) .
DE RE PUBLICA, SOMNIUM SCIPIONIS)
(Cicerone, 2003)

Quando *la rota* che tu sempiterni
desiderato, a sé mi fece atteso
con l’armonia che temperi e discerni
parvemi tanto allor del cielo acceso
de la fiamma del sol, che pioggia o fiume
lago non fece alcun tanto disteso.
La novità del suono e ’l grande lume
Di lor cagion m’accesero un disio
Mai non sentito di cotanto acume.
PARADISO, I, vv. 76-84



PLATONE,
(~428 a.C. – ~348a.C.)
raccontando il mito di Er narra che il soldato ha visto su ogni corpo celeste sedere una sirena, la quale, intonando la nota che le era stata assegnata, cantava, con le sue compagne una armoniosa e cosmica sinfonia, Anche in questo caso, la musica dei cieli testimoniava dell’ordine divino (il già citato Kosmos, opposto al Chaos).

(Platone , Repubblica, 2007)

Per entro il cielo scese una facella
Formata in *cerchio* a guisa di corona
E cinsela e girossi intorno ad ella.
Qualunque *melodia più dolce suona*
Qua giù e più a sé l’anima tira,
Parrebbe nube che squarciata tona,
Comparata al sonar di quella lira
Onde si coronava il bel zaffiro
Del quale il ciel più chiaro s’inzaffira.
Io sono amore angelico che giro
L’alta letizia che spira dal ventre
Che fu albergo del nostro disiro;
E girerommi donna del ciel, mentre
Che seguirai tuo figlio, e farai dia
Più la *spera suprema* perché lì entre.
Così la *circulata melodia*
Si sigillava, e tutti li altri lumi
Facean sonar lo nome di Maria

PARADISO, XXXIII, vv. 94-111

Il fondamentale paradigma Pitagorico

TUTTO È NUMERO

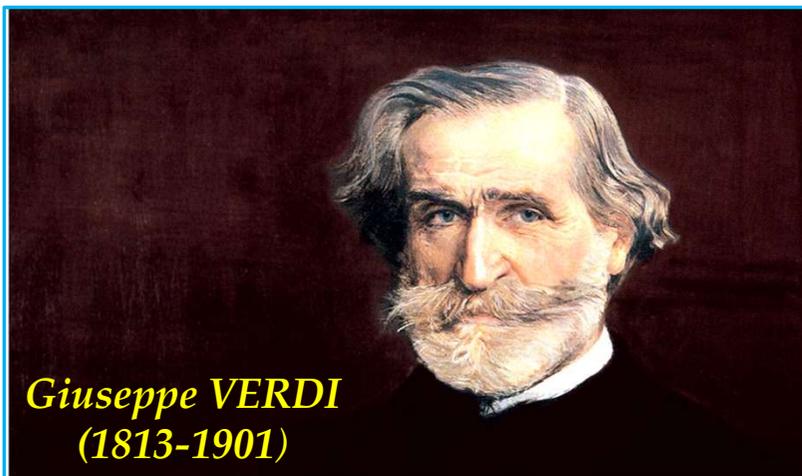
Origine e fondamento dell'armonia, il primo, l'ἀρχή, l'arché.

*Molti pensatori prima di lui avevano tentato di definire la materia elementare di cui l'universo è costituito. Talete di Mileto (~640 a.C. – ~548 a.C.) – che Aristotele (348 a.C. – 322 a.C.) considerava il fondatore della filosofia occidentale – la identificò con l'acqua, fonte di vita. Il suo successore, Anassimandro di Mileto (~610 a.C. – ~546 a.C. circa), maestro di Pitagora, sostenne che tale elemento avrebbe dovuto essere intangibile e incommensurabile: [...] e lo chiamò ἀπειρον, L'INFINITO. Anassimene di Mileto (~586 a.C. – 528 a.C.) concluse che dovesse trattarsi dell'aria. Eraclito di Efeso (535 a.C. – 475 a.C.), colpito dagli incessanti cicli naturali di morte e rinascita, individuò nel fuoco il fattore di trasformazione. [...] Pitagora (come già s'è detto) pensava che l'ἀρχή fosse privo di corporeità, ma chiaramente definibile; non percepibile dai sensi, e tuttavia capace di coinvolgerli tutti [...] La struttura primordiale, secondo Pitagora, era **IL NUMERO**. (Isacoff, 2005)*

LA LEGGENDA (?) (Giamblico, 1991)
PITAGORA E IL FABBRO DI CROTONE

*Il filosofo neoplatonico GIAMBLICO di Calcide (245 d.C. – 325 d.C. – 1991) racconta che, un giorno, passando vicino alla fucina di un fabbro crotonese, l'attenzione di Pitagora «venne catturata da alcuni suoni che provenivano dall'interno. Nel battere contro l'incudine, diversi martelli producevano una cacofonia disordinata e assordante. E tuttavia, di tanto in tanto, il clangore metallico sembrava ammorbidirsi e fondersi in un unico suono gradevole» Entrò, naturalmente, (e come avrebbe potuto evitarlo?), sebbene (scrive un commentatore egizio) il fabbro avesse «la pelle della dita screpolata come quella di un cocodrillo e puzzava come un pesce». Chiese al fabbro di poter portare i martelli a casa con sé perché voleva scoprire «la ragione del fenomeno»; forse si procurò **UN'INCUDINE** forse chiese scusa ai vicini per quel che sarebbe successo di lì a poco e – batti che ci ribatti - dopo qualche tempo verificò che «i martelli erano di peso differente» e che «ciascuno di essi dava origine a una nota diversa». Ma, ribatti che ci ribatti, finalmente scoprì che quando i pesi erano in rapporti particolari (2:1, 3:2, 4:3), le note creavano armonie «gradevolissime». Non era un semplice riverbero, ma l'eco del canto delle sirene, della «musica delle sfere» (Isacoff, cit.).*

*Prima di proseguire
facciamo un salto nel tempo,
fino al 1853...*

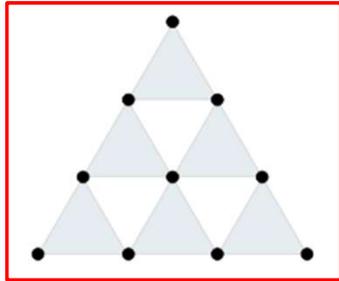


Giuseppe Verdi, Trovatore, Atto II

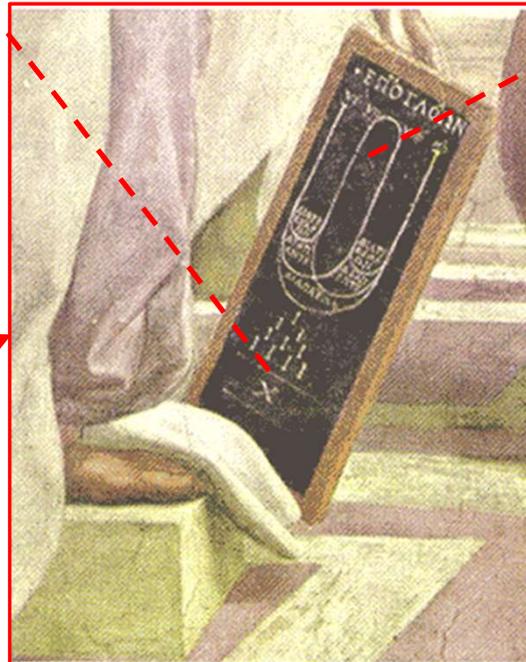
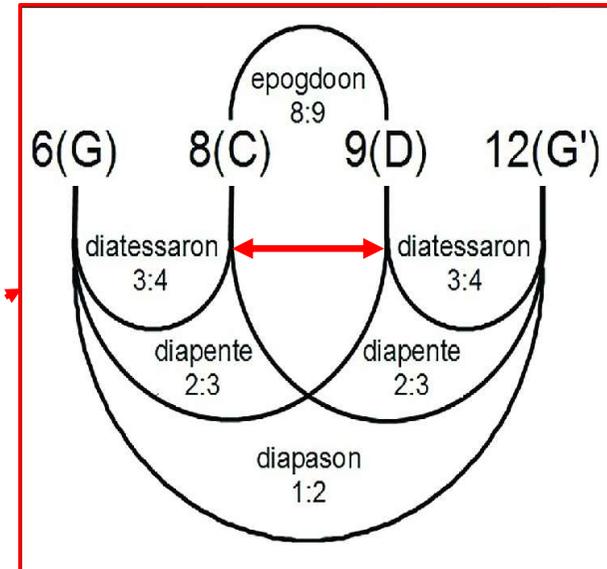
Vedi! Le fosche notturne spoglie



TORNIAMO A RAFFAELLO...
 COSA HA RAPPRESENTATO
 L'URBINATE?



LA SACRA
 TETRAKTYS
 «I NUMERI
 CHE REGGONO
 IL MONDO»

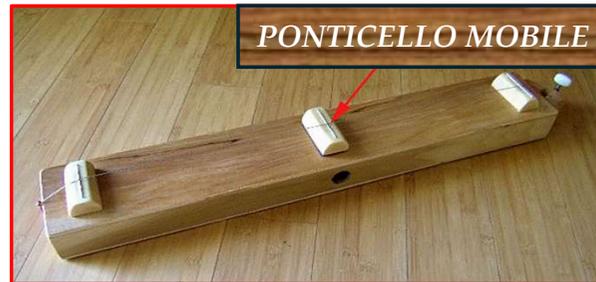


è il tono intero (PITAGORICO) che divide
 l'ottava 1:2, (il *διὰ πασῶν χορδῶν*, «attraverso
 tutte le corde) nelle due quarte 6:8 e 9:12.

L'ἐπόγδοον, composto
 di «epi, sopra» e «ogdoon, ottavo» significa:
 «un ottavo in più: $\frac{8}{8} + \frac{1}{8} = 1 + 0,125 = 1,125 = \frac{9}{8}$ »

Riprendiamo il racconto. «Affermare che queste concordanze gradevoli possano essere ottenute variando il peso dei martelli è in contraddizione con le leggi dell'acustica. [...] Si dice che Pitagora abbia ripetuto l'esperienza [...] utilizzando corde di diversa lunghezza» (Isacoff, cit.).

Per far ciò costruì (secondo Boezio) uno strumento detto **MONOCORDO** (gr. *μονόχορδος*, "una sola corda")



Il monocordo era formato da un'unica corda fissata alle estremità, sotto la quale scorreva un ponticello mobile che la divideva in due parti di lunghezza varia. Dopo aver pizzicato la corda libera, che restituiva una nota detta fondamentale, divise la stessa in due parti posizionando il ponticello esattamente alla sua metà. Pizzicando poi una delle due metà, scoprì che restituiva lo stesso suono della nota fondamentale ma ad un'altezza diversa, quella detta «ottava superiore» (rapporto **2:1**). Pitagora decise poi di dividere la corda in tre parti (rapporto **3:2**) ottenendo così un suono differente (**intervallo di 5^a giusta**). Questa lunghezza produsse un **suono consonante (gradevole all'ascolto)**. Dividendo ulteriormente la corda in quattro parti (rapporto **4:3**) ottenne poi **l'intervallo di 4^a giusta**, anche questo consonante con la fondamentale. Altrettanto importante **il rapporto 9:8, il TONO**. Secondo Pitagora, i numeri 1,2,3,4 – **LA SACRA TETRAKTYS** – erano gli unici capaci di creare armonia e bellezza e i soli capaci di reggere e descrivere il mondo.

COSTRUIRE «SCALE»

Successive sequenze di OTTAVE: « il salto doppio » o « il prodotto $\times 2$ ». Gli intervalli di 5^a GIUSTA e di 4^a GIUSTA

do_0	do_1	do_2	do_3	do_4	do_5	do_6	do_7
$1:2 = 0,5$	1	$2:1 = 2$	$2 \times 2:1 = 4$	$4 \times 2:1 = 8$	$8 \times 2:1 = 16$	$16 \times 2:1 = 32$	$32 \times 2:1 = 64$

Completiamo il lavoro: determinare l'altezza delle note comprese in un'ottava, es. tra il do_1 e il do_2

do_1			fa_1	sol_1			do_2
1			$4:3 \cong 1,333$	$3:2 \cong 1,5$			$2:1 = 2$

Ripartiamo allora dal do_1 , e **procedendo avanti di una quinta**, otteniamo la nota « associata » al numero $3:2 = 1,5$, che, essendo compreso tra 1 e 2, « dice » che la nota è compresa tra il do_1 e il do_2 , (l'intervallo di quinta è più piccolo di quello di ottava). La chiameremo "sol₁".

Adesso: partendo dal do_1 e **andando indietro di una quinta**, calcoliamo la nota associata al rapporto $2:3 \cong 0,666 > 0,5$ che è il numero del do_0 ed è posta « a destra » di questo; diciamola "fa₀". Tuttavia, essa si trova fuori dell'intervallo $do_1 - do_2$. Come fare? Avanziamo da fa₀ di una ottava, raddoppiando il rapporto $2:3$ e ottenendo il "fa₁", il rapporto $4:3 \cong 1,333$.

Fatto il primo passo, resta ora da «riempire» le caselle vuote dell'intervallo $do_1 - do_2$

do_1	re_1	mi_1	fa_1	sol_1	la_1	si_1	do_2
1	$9:8 = 1,125$	$81:64 = 1,265625$	$4:3 \cong 1.333$	$3:2 = 1,5$	$27:16 = 1,6875$	$243:128 = 1,8984375$	$2:1 = 2$

Ripartendo dal sol_1 , andiamo sempre avanti per intervalli di quinta, raggiungendo la nota corrispondente al numero $(3:2) \times (3:2) = 9:4 = 2,25$, che si trova fuori dalla $do_1 - do_2$. Sappiamo come fare: abbassiamoci di un'ottava, dividendo per 2; si creerà la nota associata al numero $9:8 = 1,125$, che chiameremo " re_1 ".

Salendo ancora di una quinta, giungiamo al suono legato al numero $(9:8) \times (3:2) = 27:16 = 1,6875$, che si trova nel nostro intervallo: questa nota la chiameremo " la_1 ".

Da questa nota si arriva a $(27:16) \times (3:2) = 81:32 = 2,53125$, che è sopra il do_2 ; serve il solito abbassamento di ottava. Dimezzando il numero, otteniamo $81:64 = 1,265625$, e diamo il nome " mi_1 " alla nota generata.

Occorre ancora un salto per arrivare alla nota numero $(81:64) \times (3:2) = 243:128 = 1,8984375$, che appartiene all'ottava e che chiameremo " si_1 ".

ECCO L'ELEGANTE SCALA PITAGORICA (o di Eratostene – III sec. a.C.?)

Essendo però, noi, figli del dubbio e non delle certezze, chiediamo a SORELLA MATEMATICA...

che cosa di fatto accade nella sistemazione numerica delle «sette note pitagoriche» in un'ottava qualsivoglia che, per convenzione, si fa iniziare dal do, qual che sia il suo pedice. Ripartiamo dalla già vista «scala diatonica dello stesso Pitagora»

do_1	re_1	mi_1	fa_1	sol_1	la_1	si_1	do_2
1	$9:8 = 1,125$	$81:64 = 1,265625$	$4:3 \cong 1.333$	$3:2 = 1,5$	$27:16 = 1,6875$	$243:128 = 1,8984375$	2

Intervallo tra do e re	Intervallo tra re e mi	Intervallo tra mi e fa	Intervallo tra fa e sol	Intervallo tra sol e la	Intervallo tra la e si	Intervallo tra si e do
$(9:8):1=9:8 = 1,125$	$(81:64):(9:8)=9:8 = 1,125$	$(4:3):(81:64)=256:243 \cong 1,053$	$(3:2):(4:3)=9:8 = 1,125$	$(27:16):(3:2)=9:8 = 1,125$	$(243:128):(27:16)=9:8 = 1,125$	$2:(243:128)=256:243 \cong 1,053$
TONO	TONO	LIMMA O RESIDUO (SEMITONO)	TONO	TONO	TONO	LIMMA O RESIDUO (SEMITONO)

La delusione di Pitagora derivò dallo scoprire che l'ottava non poteva dividersi in parti proporzionali, o come s'è detto, in parti uguali. (*Teorema di Archita*)

«Celato in profondità, proprio dietro le più famose formule di Pitagora, c'era un errore fatale. Lui lo sapeva, e questa consapevolezza divenne il grande mistero del culto pitagorico, da non svelare mai pena la morte. Questo il segreto: talvolta i calcoli di Pitagora davano come risultato numeri selvaggi, incomprensibili, ciò che i greci chiamavano «alogon» (probabilmente «senza logos», cioè) «l'inesprimibile»; oggi noi chiamiamo queste grandezze «incommensurabili» (Isacoff, cit.). Ricordiamo Ippaso di Metaponto (~530 a.C. - ~450 a.C.), martire della matematica e la «sua» $\sqrt{2}$

I TENTATIVI DI VARIARE ... TEMPERANDO

Per cercare di eliminare «il problema di Pitagora» Gioseffo ZARLINO (1517 d.C.-1590 d.C) cui viene attribuita l'invenzione dell'armonia **tonale** (v.fig.1 confronto con Pitagora), propose di includere i rapporti **5/4 (terza maggiore)** e **6/5 (terza minore)** (comunque **assonanti**) tra gli intervalli fondamentali della scala pitagorica. Questo suggerimento, tuttavia, implicava che, in qualche modo, si usassero anche i numeri 5 e 6, un'eresia per i pitagorici che, com'è noto, per essere ammessi alla scuola del Capo almeno come «acusmatici» (**ἀκουσματικοί**), giuravano sulla Sacra Tetraktys. L'idea (avuta già da Aristosseno) fu momentaneamente abbandonata appunto perché confliggeva col pensiero di Pitagora. In effetti, la soluzione di Zarlino consisteva in un temperamento della scala, ossia nel "limare" gli intervalli di terza e sesta per "accordarli", semplificandoli.

Intervallo tra do e re	Intervallo tra re e mi	Intervallo tra mi e fa	Intervallo tra fa e sol	Intervallo tra sol e la	Intervallo tra la e si	Intervallo tra si e do
9:8	10:9	16:15	9:8	10:9	9:8	16:15
Intervallo tra do e re	Intervallo tra re e mi	Intervallo tra mi e fa	Intervallo tra fa e sol	Intervallo tra sol e la	Intervallo tra la e si	Intervallo tra si e do
9:8	9:8	256:243	9:8	9:8	9:8	256:243

(fig.1)

Ma Pitagora e una numerosissima schiera di musicisti successivi (ad esempio, Galileo Galilei (1564 d.C.-1642 d.C.) pensavano che il suono e la consonanza generata da rapporti "semplici", ossia da frazioni tra numeri interi "piccoli, fosse «gradita» dall'orecchio! In realtà la scala naturale di Zarlino, invece di semplificarla, rendeva «più complicata» l'accordatura rispetto alla pitagorica; uno dei motivi è il fatto che la sua scala, oltre che due semitoni (16:15) e tre toni (9:8) come nella pitagorica, preveda tre toni minori (10:9)

Deviazione ammessa

Legame tra musica e fisica

Come oggi sappiamo, la frequenza (la “nota”) fondamentale f_0 del suono emesso da una corda tesa posta in vibrazione è inversamente proporzionale alla sua lunghezza L , e, direttamente proporzionale alla radice quadrata del rapporto tra la sua tensione T e la sua densità lineare μ

$$f_0 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

<i>simbolo</i>	<i>significato</i>	<i>unità di misura nel sistema SI</i>
<i>L</i>	<i>lunghezza della corda</i>	<i>m</i>
<i>T</i>	<i>tensione della corda</i>	<i>N</i>
<i>μ</i>	<i>densità lineare della corda</i>	<i>kg m⁻¹</i>

LUI LO SAPEVA...CHE NEI SUOI NUMERI C'ERA UNA FALLA...

«...e lo scoprì personalmente mentre misurava le proporzioni musicali [...] sul monocordo [...]. Se si suppone che la prima nota ottenuta pizzicando una corda libera fosse un **do**, regolò la lunghezza della corda in maniera che il suono successivo fosse il **do** all'ottava più alta. **Procedendo da questo punto in avanti Pitagora ottenne un'altra ottava e un'altra ancora. Una dopo l'altra, stabilì sette ottave consecutive.** (Isacoff, cit.).

Pensò di ripetere «il processo» su due strumenti, dividendo la lunghezza della corda dell'uno per ottenere **quinte** invece che **ottave**; e ripeté l'operazione per **12 volte**: al termine dell'esperimento, di un ciclo, Pitagora si aspettava di giungere allo stesso **do** su entrambi gli strumenti; invece i due suoni erano «quasi» **gli stessi, solo in leggero - e fastidioso - disaccordo. La verità è che le ottave e le quinte (di Pitagora) sono incommensurabili [...] come i numeri «inesprimibili»** (Isacoff, cit.). Le ottave sono basate su multipli di due (2:1) mentre le quinte si fondano su multipli di tre (3:2); **2 e 3 sono numeri primi**, dunque per quante volte li si moltiplichino non potranno mai avere multipli in comune. Infatti, quali che siano «n» ed «m» **INTERI**, se $(3/2)^n = 2^m$, cioè $3^n = 2^{m+n}$ si conclude che una potenza intera di 3 - numero dispari - è uguale a una potenza intera di 2 - numero pari - il che è impossibile. (Ex falso quodlibet). In altre parole, sette ottave sono «un poco di più» che 12 quinte: $(3/2)^{12} \times (1/2)^7 > 1$.

Come s'è visto il cd **CICLO DELLE QUINTE**, ciclo che, percorso sia in verso orario che in verso antiorario, dopo dodici «passaggi» avrebbe consentito alle frequenze di due note omonime di «chiudersi perfettamente coincidenti», non si chiuse ma, a causa del citato **COMMA PITAGORICO**, che è l'infinitamente decrescente ma perfettamente percettibile, invece di un cerchio, generò una spirale «logaritmica», che, avendo a conti fatti, il raggio di accrescimento pari a $\varphi \cong 1,618...$ è una «**spirale aurea**» o di **FIBONACCI** e rappresenta **la bellezza del mondo**. Il desiderio di Pitagora di creare un sistema di **temperamento** eterno e immutabile che piacesse anche agli Dei naufragò.

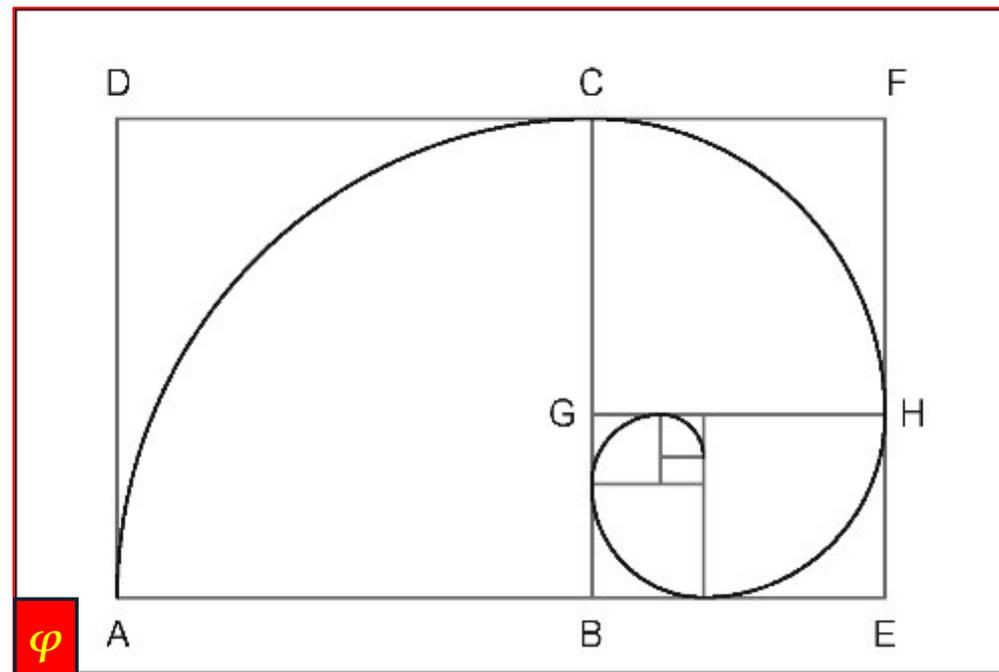
Se nella scala di Pitagora si compongono due semitoni successivi non si otterrà mai un tono. Infatti

$$256:243 \times 256:243 < 9:8 \quad e \quad 9:8 : (256:243)^2 = 3^{12} : 2^{19} > 1$$

$3^{12} : 2^{19}$ è il COMMA PITAGORICO

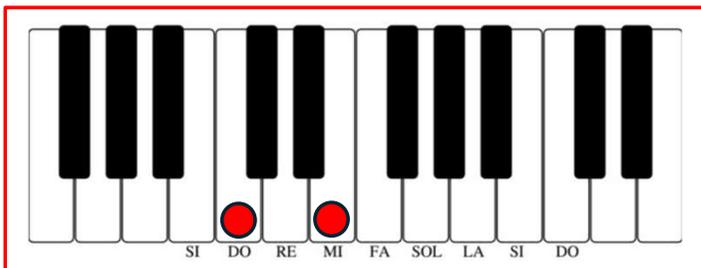


Il
rettangolo
AEFD
È AUREO
ed è
composto
da
rettangoli
AUREI



La rottura con Pitagora

La totale fedeltà alle proporzioni Pitagoriche cominciò ad incrinarsi, sebbene numerosi artisti (musicisti, pittori, scultori, architetti, perfino poeti) mantenessero inalterate quelle «misure». Il «canto piano», che Carlo Magno aveva cercato di imporre «nei territori sotto il suo controllo» diversamente da ciò che accadeva in Italia, non era molto apprezzato nel Nord Europa, anche perché quei cantori avevano «voci grezze» [...] e non riuscivano a cantare le soavi melodie del canto piano «perché avevano la gola arrocchita dal troppo bere». [...] Ora [...] il ruolo di guida nella vita musicale toccava all'Inghilterra». Le nuove armonie inglesi vennero chiamate terze» (Isacoff, cit.) Il salto musicale, o intervallo, do e mi (fig. 1) è una TERZA MAGGIORE ed è il risultato di due suoni la cui frequenza reciproca è 5:4. Suonato in senso discendente, quest'intervallo è stato usato da Ludwig van BEETHOVEN (1770 – 1827) per il tonante inizio della Quinta Sinfonia. L'intervallo di TERZA MINORE si trova (fig.2) tra re e fa, formato dalla proporzione 6:5. «La Marcia funebre della sonata n° 35 op.2 in si bemolle minore di Fryderyk CHOPIN (1810-1849), così dolorosamente triste, si apre, dopo quattro ripetizioni della prima nota, con un intervallo di terza minore. (Isacoff, cit.)

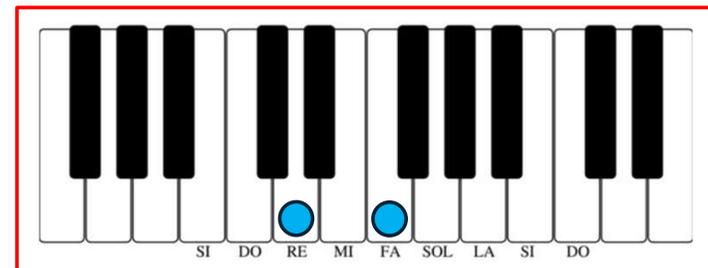


(fig. 1)
TERZA MAGGIORE

$$\frac{9}{8} \times \frac{10}{9} = \frac{5}{4}$$



Sonata op. 35 n°2 - 3° Movimento
Marcia funebre in si b minore



(fig. 2)
TERZA MINORE

$$\frac{9}{8} \times \frac{16}{15} = \frac{6}{5}$$

Le soluzioni a questi problemi passarono attraverso il cosiddetto temperamento che consiste nell'accordare gli strumenti leggermente fuori tono, così da rendere i vari intervalli più bilanciati tra loro. Vincenzo Galilei (1520-1591), padre di Galileo, propose di modificare la scala naturale adottando un semitono costante pari a 18/17. La sua soluzione fu contestata ai primi del Seicento dal matematico S. Stevin, che propose il cosiddetto **temperamento equabile** (già proposto da Aristosseno di Taranto, ndr). Si comprese in tal modo che non bastavano i numeri razionali e che ostinarsi a usare le frazioni portava a un vicolo cieco. Richiedere infatti che i semitoni siano uguali equivale a considerare l'uguaglianza per cui il rapporto tra due successivi DO sia uguale a k^{12} ; ma, poiché i due DO distano fra loro un'ottava, si ha l'equazione $k^{12} = 2$ (Guerraggio, ET)

Infatti, la soluzione di quest'equazione è: $K = \sqrt[12]{2} \cong 1,0593$ che corrisponde al mezzo tono. Valgono le due disuguaglianze

$$\sqrt[12]{2} < \frac{10}{9} \text{ (il semitono maggiore zarliniano)} \text{ e } \sqrt[12]{2} > \frac{256}{243} \text{ (il semitono pitagorico)}$$

Nel 1691 il musicista tedesco Andreas Werckmeister (1645-1706) introdusse il cosiddetto **buon temperamento**, («accordatura ben temperata») un temperamento composto da 5 quinte mesotoniche e 7 quinte pitagoriche con cui riuscì a chiudere quasi perfettamente il ciclo delle quinte. La sua scala segna un punto di svolta nella storia della musica e fu particolarmente apprezzata da Johann Sebastian Bach (1685-1750) che la utilizzò nel suo **CLAVICEMBALO BEN TEMPERATO**. La profonda ispirazione matematica della musica di Bach è universalmente riconosciuta. Amava i numeri e ad alcuni di essi attribuiva particolari significati simbolici, [...]. **(1)** La scoperta degli irrazionali e la costruzione di scale sempre più adeguate da una parte rappresentano un'innovazione tecnica ma dall'altra inducono a un ripensamento delle stesse opere musicali: il temperamento equabile, per esempio, portò con sé il concetto di tonalità, che pone con forza l'accento sugli accordi, cioè i rapporti tra le note eseguite contemporaneamente. (Guerraggio, cit.)

(1) (HOFSTADTER, 1984)

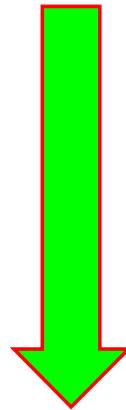


J.S. BACH, Suite n° 1 per violoncello solo in sol maggiore, Preludio, Pablo CASALS (1876 – 1973)

...E PER FINIRE, LASCIAMO ALLA MUSICA
IL DRAMMATICO COMMOVENTE COMPITO DI FAR DA PONTE
TRA IL PASSATO E UN DOLOROSO PRESENTE...

*Sui fiumi di Babilonia,
là sedevamo piangendo
al ricordo di Sion.
Ai salici di quella terra
appendemmo le nostre cetre.
Là ci chiedevano parole di canto
coloro che ci avevano deportato,
canzoni di gioia, i nostri oppressori:
«Cantateci i canti di Sion!».
Come cantare i canti del Signore
in terra straniera?*

DAL SALMO 136-137 DELLA BIBBIA



ALLE FRONDE DEI SALICI
«E come potevamo noi cantare
con il piede straniero sopra il cuore,
fra i morti abbandonati nelle piazze
sull'erba dura di ghiaccio, al lamento
d'agnello dei fanciulli, all'urlo nero
della madre che andava incontro al figlio
crocifisso sul palo del telegrafo?
Alle fronde dei salici, per voto,
anche le nostre cetre erano appese,
oscillavano lievi al triste vento».

Salvatore QUASIMODO (1901-1968)



*Va, pensiero, sull'ali dorate
Va, ti posa sui clivi, sui colli
Ove olezzano tepide e molli
L'aure dolci del suolo natal
Del Giordano le rive saluta
Di Sione le torri atterrate
Oh, mia patria sì bella e perduta
Oh, membranza sì cara e fatal
Arpa d'or dei fatidici vati
Perché muta dal salice pendi?
Le memorie nel petto raccendi
Ci favella del tempo che fu
O simile di Sòlima ai fati
Traggi un suono di crudo lamento
O t'ispiri il Signore un concerto
Che ne infonda al patire virtù
Che ne infonda al patire virtù
Che ne infonda al patire virtù
Al patire virtù*

Bibliografia

- *Bottazzini, U., 2020, Pitagora, il padre di tutti i teoremi, Il Mulino, Bologna*
- *Cicerone, M. T., 2003, Il sogno di Scipione, Marsilio, Padova*
- *Dante, Commedia*
- *Dante, Convivio*
- *Giamblico, 1991, La vita Pitagorica, Rizzoli, Milano*
- *Guerraggio, A, ET, Enciclopedia Treccani*
- *Hofstadter, D., L., 1984, Gödel, Escher, Bach, Un'Eterna Ghirlanda Brillante, Adelphi, Milano*
- *Isacoff, S., 2005, Temperamento, Storia di un enigma musicale, EDT, Torino*
- *Lombardo Radice, L., 1976 (in: AA.VV, Introduzione alla logica, Editori Riuniti, Roma)*
- *Novalis, Monolog, 2024, Iduna, Sesto San Giovanni (Mi)*
- *Platone, 2007, Repubblica, Armando, Roma*
- *Quasimodo, S., 1995, Tutte le poesie, Mondadori, Milano*
- *Wertheim, M., 1996, I pantaloni di Pitagora, Dio, le donne e la matematica, Instar, Torino*
- *Zellini, P., 1999, Gnomon, Adelphi, Milano*